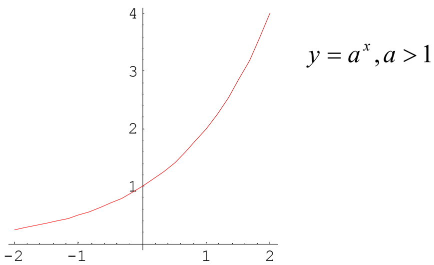
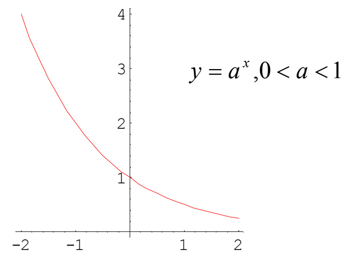
Логаритамска функција

За експоненцијалну функцију $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$





утврдили смо да је бијективна функција тј. да је “1-1” и “NA”.
То значи да постоји инверзна функција експоненцијалне функције.

Како је $f : R \to (0,+\infty)$, онда код инверзне функције f^{-1} имамо:

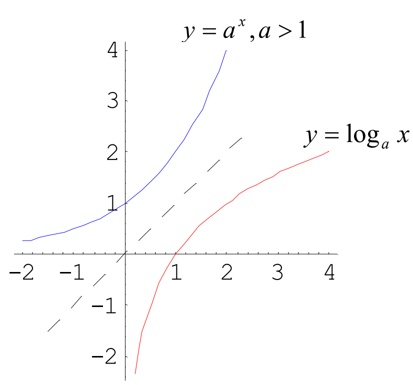
$f^{-1} : (0,+\infty) \to R$ и важи једнакост: (1) $f^{-1}(f(x)) = x$ за све $x \in R$.

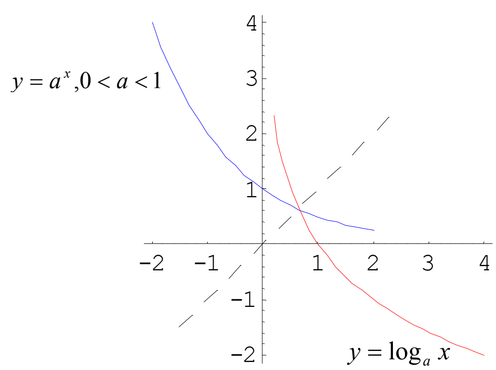
Дакле, $f^{-1}(a^x) = x$. Увођењем замене $a^x = y$ добијамо $f^{-1}(y) = x$. У даљем, потребно је да, због x на десној страни последње једнакости, из замене $a^x = y$ изразимо *x* преко *y*. Управо на овом месту уводимо појам логаритма. Тако имамо да је $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$.

Једнакост $x = \log_a y$, тумачи се на следећи начин:

*<u>логаритам</u> од **y** по основи **a** <u>јесте експонент</u> **x** којим, када се степенује основа **a** добије се **y**.*

Дакле, сада је $f^{-1}(y) = \log_a y$, односно, вратимо ли се на слово x, $f^{-1}(x) = \log_a x$, и инверзна функција експоненцијалне функције, јесте логаритамска функција.
Њен график ћемо добити осном симетријом графика експоненцијалне функције. Оса симетрије је права $y = x$.





Обратимо ли пажњу на једнакост (1), уочићемо да је $\log_a a^x = x$, $x \in R$.

А са друге стране, заменивши места у композицији: $f(f^{-1}(x)) = x$ уочавамо да је $a^{\log_a x} = x$ за све $x \in (0,+\infty)$. Значи, $f^{-1}(f(x)) \neq f(f^{-1}(x))$, тј. $\log_a a^x \neq a^{\log_a x}$ за $x \in R$, јер $f^{-1} \circ f : R \to R$, а $f \circ f^{-1} : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$.

Особине логаритамске функције $f(x) = \log_a x$

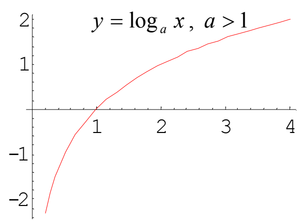
(једноставно, посматрањем графика – црвена линија на претходној слици)

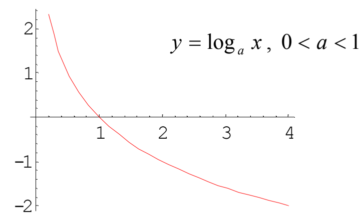
- Домен функције је $D_f = (0,+\infty)$, а кодомен функције је $K_f = R$.
- нуле функције; Из услова $f(x) = 0$ тј. $\log_a x = 0$ имамо да је $x = a^0 = 1$. Дакле, логаритамска функција има једну нулу за $x = 1$.
- екстремне вредности функције. Како је логаритамска функција бијективна, и њен кодомен је скуп R, то значи да нема екстремну вредност.
- монотоност функције. Можемо приметити да међусобно инверзне функције задржавају исту монотоност, према томе и овде ћемо као и код експоненцијалне функције разликовати две класе логаритамских функција. За $a > 1$, класа растућих, и за $0 < a < 1$, класа опадајућих логаритамских функција. Дакле,

  за $a > 1$, f је строго растућа за све $x \in D_f$

  за $0 < a < 1$, f је строго опадајућа за све $x \in D_f$
- знак функције. И овде разликујемо случајеве, када је $a > 1$, и када је $0 < a < 1$. Тако да је за $a > 1$: $y < 0$ за $0 < x < 1$, и $y > 0$ за $x > 1$, док је

  за $0 < a < 1$: $y > 0$ за $0 < x < 1$, и $y < 0$ за $x > 1$.
- парност функције; график логаритамске функције нити је симетричан у односу на Y осу, а нити је централно симетричан у односу на координатни почетак. Према томе, логаритамска функција није нити парна, нити непарна
- график





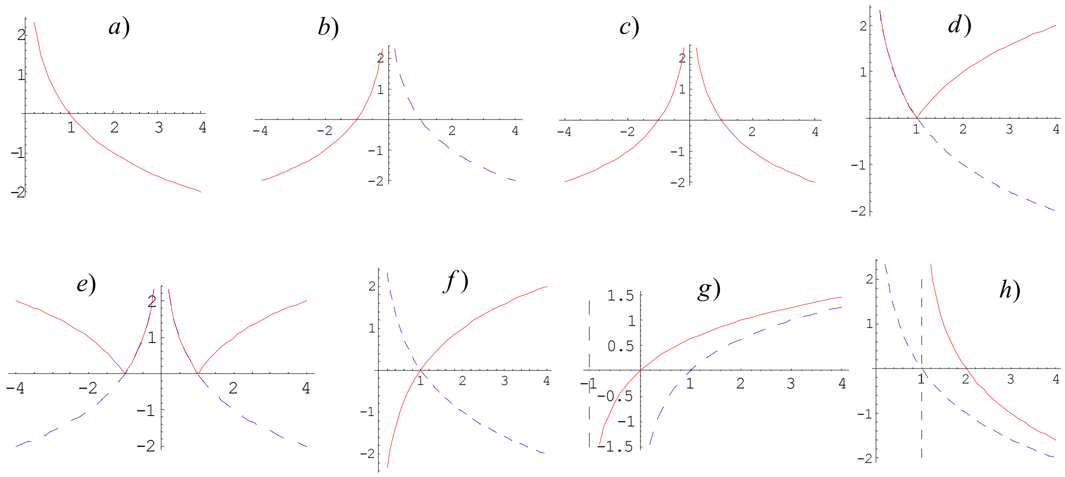
Пример 1. Скицирати график функције и описати њене особине:

a) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$ c) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$ d) $y = |\log_{\frac{1}{2}} x|$

e) $y = |\log_{\frac{1}{2}}|x||$ f) $y = -\log_{\frac{1}{2}} x$ g) $y = \log_3(x+1)$ h) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

Прво се скицира график логаритамске функције у једном од два облика, (види претходну слику) зависно од основе логаритма, а затим се, разним осним симетријама, и транслацијама; што зависи од аналитичког израза функције, тај график трансформише у одговарајући график функције. После цртања графика у координатном систему, особине се читају са графика.

одговори:



c)

- домен функције; $D_f = R \setminus \{0\}$, а кодомен, $K_f = R$
- нуле функције; график сече X осу у две тачке, према томе, функција има две нуле, за $x = -1$ и $x = 1$
- нема екстремне вредности, јер нема ограничавајућу вредност нити одозго, нити одоздо
- монотоност; $f \uparrow$ за $x < 0$, и $f \downarrow$ за $x > 0$
- знак функције; $y < 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, и $y > 0$ за $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$
- парност; функција је парна, јер је график осно симетричан у односу на Y осу, односно, аналитички имамо, $f(-x) = \log_{\frac{1}{2}} |-x| = \log_{\frac{1}{2}} |x| = f(x)$

d)

- домен функције; $D_f = (0, +\infty)$, а кодомен, $K_f = [0, +\infty)$
- нуле функције; график додирује X осу у тачки $x = 1$, према томе, ту је нула функције
- екстремне вредности; функција има минималну вредност $y_{\min} = 0$ за $x = 1$
- монотоност; $f \downarrow$ за $x \in (0, 1)$, и $f \uparrow$ за $x \in (1, +\infty)$
- знак функције; $y > 0$ за $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
- парност; нити је парна, нити непарна.

h)

- домен функције; $D_f = (1, +\infty)$, а кодомен, $K_f = R$
- нуле функције; график сече X осу у тачки $x = 2$, што представља нулу функције
- нема екстремне вредности
- монотоност; $f \downarrow$ за све $x \in D_f$
- знак функције; $y > 0$ за $x \in (1, 2)$, и $y < 0$ за $x > 2$
- парност; нити је парна, нити је непарна

Самостално обрадити остале одговоре.

проф.И.Јоксимовић